

# Geología desde los ojos de un dron

Una poderosa herramienta educativa para los actuales ingenieros en Ciencias de la Tierra

Proyecto DGAPA/UNAM/PAPIME: PE101020

Unidades Teóricas

UT-05

Principios de estadística esférica  
y su utilización en las geociencias

Mancera-Alejandro Javier



UNAM / FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA



Este producto docente ha sido financiado por la DGAPA-UNAM a través del proyecto PAPIME PE101020 “Geología desde los ojos de un dron: una poderosa herramienta educativa para los actuales ingenieros de la Tierra”.

Por favor cítanos como:

Mancera-Alejandrez J., (2021), Principios de estadística esférica, Unidad teórica UT-05, proyecto PAPIME clave PE101020 (DGAPA-UNAM): “Geología desde los ojos de un dron: una poderosa herramienta educativa para los actuales ingenieros de la Tierra”. Facultad de Ingeniería, UNAM.

## 1. Introducción

En Ciencias de Tierra existen dos tipos de datos, direccionales y no direccionales. La estadística que nos ayuda a tratar datos direccionales es la “estadística esférica” o también llamada “estadística direccional” (*spherical/directional statistics*). Ejemplos de datos direccionales son planos y superficies estructurales, buzamientos, paleomagnetismo, paleocorrientes, direcciones de ellos ejes ópticos, etc.

Los modelos de distribución direccionales de Fisher (1953) para concentraciones circulares o simétricas, de Bingham (1964) para concentraciones elípticas y de Kent (1982) para ambos tipos de concentraciones, son los más utilizados en geociencias ya que permiten analizar agrupaciones (circulares) de datos que representan planos como fallas, fracturas, estratificación, etc., y/o superficies como pliegues, fracturas “curvadas”, etc.

En general a escala de local o de “afloramiento” (decenas de metros), la cantidad de mediciones de la actitud de superficies (rumbo y echado) pueden ser pocas, ya que la variación de las orientaciones de una superficie a esta escala suele salir de la resolución de un levantamiento tradicional con brújula; mientras que para una escala regional se pueden reunir una gran cantidad de datos los cuales se pueden analizar de forma estadística.

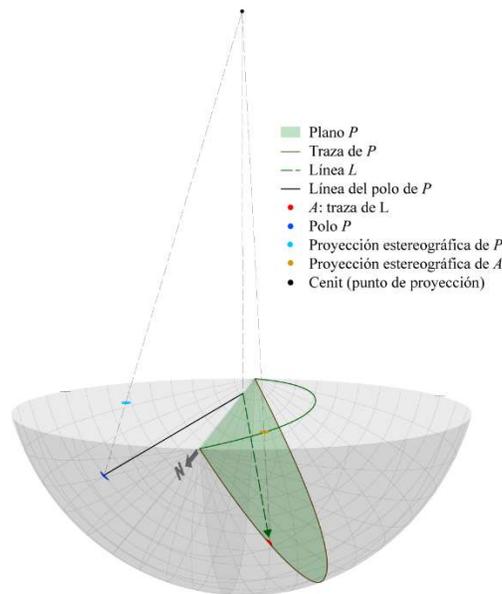
Por otro lado, la integración de nuevas tecnologías en la obtención de datos direccionales, a escala local, tales como radares, fotogrametría, etc., permite la recolección de una gran cantidad de datos independientemente de la escala de observación, los cuales requieren de análisis estadísticos para que estos sean representativos y reflejen el fenómeno que se está estudiando.

El presente documento tiene como objetivo plantear los principios básicos de la estadística esférica haciendo referencia principalmente a la distribución de Fisher y sus principales medidas paramétricas. También se presenta una revisión de las aplicaciones que pueden tener estas herramientas en la evaluación y procesamiento de grandes cantidades de datos obtenidos con tecnologías como la fotogrametría digital.

## 2. Marco teórico de referencia

Regularmente los datos estructurales como la actitud de planos suelen ser trabajados con proyecciones estereográficas, dependiendo del problema se puede usar la red de Schmidt (equiareal) o la red de Wulf (equiangular) (Marshak y Mitra, 1988).

Observando la Figura 1, esto permite simplificar el manejo de datos tridimensionales considerando que si un plano (Plano P) está ubicado en el centro de una esfera unitaria, su intersección con la esfera formará un gran círculo (Traza de P), y si a esta la proyectamos hacia el plano horizontal formara la línea L cuya representación es ya una simplificación útil. De cualquier forma, es más sencillo representar al plano por un eje (Línea del polo P) que es perpendicular al plano y cuya proyección al plano horizontal (Polo P) requiere de solo los datos de dirección e inclinación de con respecto a la Línea del polo P. Convencionalmente, los geólogos grafican la intersección de un polo con el hemisferio inferior, Figura 1.



*Figura 1. Proyección estereográfica de un plano en el espacio. Elaboración propia.*

Cuando tenemos conjuntos muy grandes de datos tridimensionales pueden resultar en diagramas que contienen tantos puntos que su patrón general no es evidente. En dichos casos la densidad local de los puntos puede ser contorneada al contar el número de puntos que se distribuyen en un área pequeña del diagrama. Esto se puede hacer solo si se usa la proyección equiareal (red de Schmidt). La proyección está cubierta con un arreglo regular de nodos en la red y el número de puntos dentro de un radio fijo de cada nodo es contado, Figura 2. Usualmente el radio es configurado de manera que describa un círculo conteniendo 10% del área total, Davis (2002).

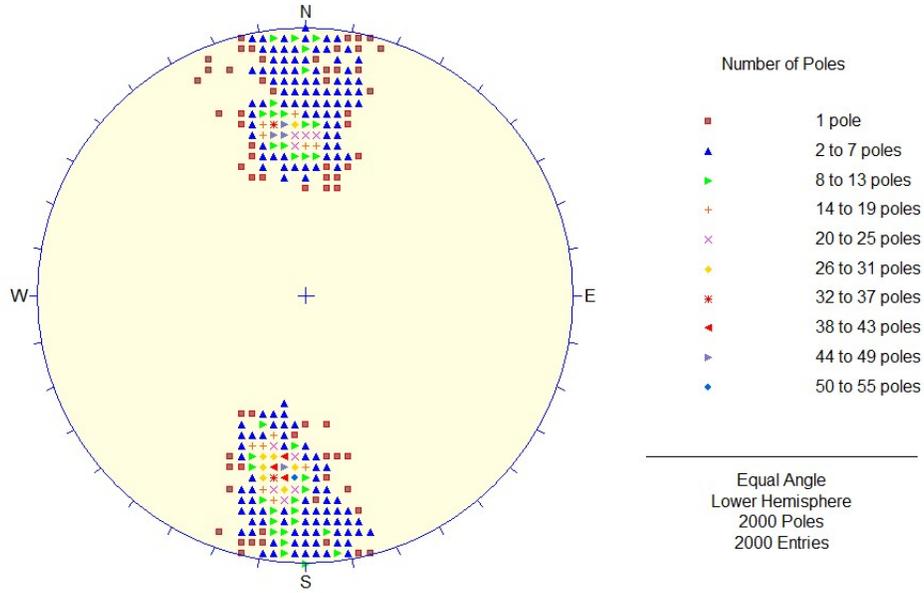


Figura 2. Proyección estereográfica para un segmento de una nube de puntos de 2000 datos.  
Elaboración propia.

Las pruebas más sencillas de orientación tridimensional son extensiones de aquellas usadas con datos circulares. Como en esa instancia necesitamos un modelo probabilístico de características conocidas contra el que se pueda probar. Un modelo ampliamente utilizado es la distribución de Fisher, como una extensión de la distribución de von Mises y un equivalente esférico a la curva normal (Davis, 2002).

La función de la distribución de Fisher  $P_{dA}(\theta)$  (Ec. 1.) proporciona la probabilidad por unidad angular de área de encontrar una dirección dentro de un área angular,  $dA$ , centrada en un ángulo  $\theta$  a partir de la dirección “real”. El área angular  $dA$ , está expresada en estereorradianes, con el área angular total de  $4\pi$  estereorradianes. Las direcciones están distribuidas acorde a la probabilidad de la función de densidad.

$$P_{dA}(\theta) = \frac{\kappa}{4\pi \text{sen}(\kappa)} \exp(\kappa \cos\theta) \quad (1)$$

La distribución de Fisher está caracterizada entonces por dos parámetros: un desplazamiento angular  $\theta$  con respecto al vector medio  $\bar{\theta}$ , en el que  $\theta = 0$  y la densidad es máxima, y una dispersión  $\kappa$  (también llamada factor de concentración o dispersión) que es una medida de precisión. Las bases matemáticas sobre la ecuación de la distribución se discuten ampliamente en Borradaile (2002) y Mardía (1975).

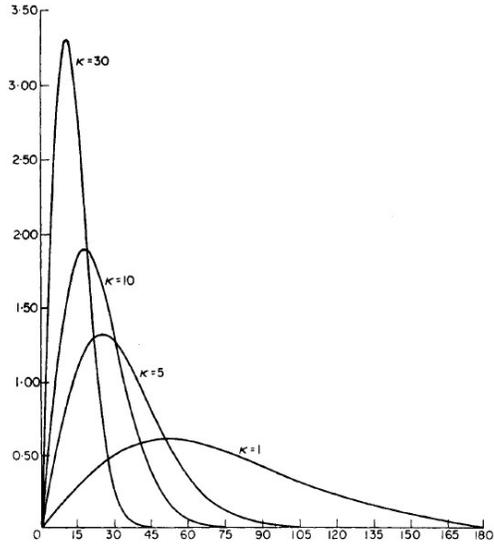


Figura 3. Distribución de la densidad de  $\theta$  en la distribución de Fisher para valores de  $\kappa=1,5,10,30$  (Mardia, 1975).

Cuando  $\kappa$  es grande la distribución es efectivamente confinada una pequeña porción de la esfera y cuando  $\kappa$  es cero, la distribución es uniforme en toda la superficie de la esfera (Fig. 3). Como se trata de tres dimensiones, el vector medio tiene tres elementos, cada una con un coseno director con respecto a tres ejes coordenados. La dispersión entonces se puede calcular con la Ec. (2)

$$\kappa \approx \frac{n-1}{n-R} \quad (2)$$

Se necesita un método para determinar el límite de confianza para una dirección media calculada. Este límite de confianza es análogo al error estándar estimado de la media  $\Delta m$  de la estadística Gaussiana. Para la estadística de Fisher, el límite de confianza está expresado como un radio angular desde la dirección media calculada. Un nivel de probabilidad debe ser indicado para que el límite de confianza quede completamente definido.

Para un conjunto de datos direccionales con  $n$  direcciones, el ángulo  $\alpha_{(1-p)}$  dentro del cual se encuentra la media real desconocida a un nivel de confianza  $(1-p)$  está dado por la Ec. 3.

$$\cos \alpha_{(1-p)} = 1 - \frac{n-R}{R} \left\{ \left( \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right\} \quad (3)$$

La opción usual de nivel de probabilidad  $(1 - p)$  es **0.95 (95%)**, y el límite de confianza se denota usualmente como  $\alpha_{95}$ . Una aproximación conveniente (razonablemente precisas para  $\kappa \geq 10$  y  $n \geq 10$ ) se presentan en la ecuación 4, [Borradaile \(2002\)](#).

$$\alpha_{95} \approx \frac{140^\circ}{\sqrt{\kappa n}} \quad (4)$$

Este modelo de distribución es suficiente cuando los datos que estamos trabajando corresponden a distribuciones simétricas (también llamadas *clusters*), es decir que el cono de confianza que se forma alrededor del vector medio corresponde a un círculo y el elemento que describe es una superficie plana. Ejemplos de estos, son planos de discontinuidad de un macizo rocoso como fracturas, fallas, estratificación, etc., que en la práctica se pueden simplificar como planos aunque en la realidad sean superficies no planas.

### 3. Aplicaciones en las geociencias

Las pruebas estadísticas de datos direccionales para superficies de discontinuidad, distribuidos en tres dimensiones han sido desarrolladas solo en años recientes, en parte porque las matemáticas relacionadas a las distribuciones son muy complicadas. De cualquier forma, los problemas geológicos que incluyen vectores son excesivamente comunes, y no se debe ser cerrado al uso de las técnicas estadísticas disponibles para su interpretación ([Davis, 2002](#)).

Ejemplos de datos direccionales en tres dimensiones en Ciencias de la Tierra incluyen: medidas de rumbo y echado tomadas para análisis estructurales, medidas vectoriales del campo geomagnético, permeabilidades direccionales medidas en núcleos procedentes de yacimientos de petróleo, medidas de orientación e inclinación de estratificación o laminación cruzada, y determinación de ejes cristalográficos para estudios de petrofábrica ([Mardia, 1972](#)).

Ejemplos de aplicaciones recientes se presentan en trabajos en donde se manejan nubes de puntos como el trabajo de [Drews et. al. \(2018\)](#), en el que calcula las medidas de dispersión  $\kappa$  y la apertura del cono de confianza  $\theta$  para comparar estadísticamente datos obtenidos con brújula, LiDAR y una herramienta de extracción de planos del software Virtual Reality Geological Studio (VRGS), obteniendo así una comparativa entre las diferentes técnicas para obtener estos datos ( $\alpha_{AC}$ ,  $\alpha_{AV}$ ,  $\alpha_{CV}$ ), Tabla 4.

Tabla 1. Extracto de la tabla de resultados comparativa entre mediciones con brújula (compass survey), LiDAR y VRGS, *Drews et. al. (2018)*.

Automated (LiDAR)		Compass survey				VRGS		deviation angles [°]		
Dip dir. [°]	Dip [°]	n	Dip dir. [°]	Dip [°]	Con.	Dip dir. [°]	Dip [°]	$\alpha_{AC}$	$\alpha_{AV}$	$\alpha_{CV}$
273.14	75.30	8	267.02	77.08	1	272.77	76.42	6.20	1.18	5.64
81.91	85.17	4	80.67	86.26	1	80.98	84.17	1.65	1.36	2.12
257.33	78.62	3	249.41	76.72	1	255.71	77.03	7.97	2.24	6.14
321.84	73.50	8	321.79	75.55	1	323.07	72.08	2.50	1.16	3.00
54.97	82.24	4	57.08	81.65	2	53.82	83.39	2.17	1.87	1.85
76.42	84.33	2	79.56	85.50	1	74.22	83.12	3.34	2.50	5.82
324.43	75.77	6	324.50	81.06	3	323.07	74.54	5.29	1.80	6.67
51.22	25.91	6	48.82	27.23	1	53.82	24.37	1.70	1.89	3.59
274.20	84.34	12	272.85	77.65	2	276.47	84.90	6.82	2.33	8.08
108.47	32.18	3	104.70	35.03	2	109.82	34.03	3.53	1.99	3.07
138.46	81.45	5	140.26	80.64	3	140.10	79.25	1.95	2.73	1.40
111.02	69.24	3	104.28	70.55	2	110.89	68.95	6.46	0.31	6.40
302.78	85.29	5	292.94	83.41	2	303.45	85.14	9.97	0.68	10.60
268.42	86.36	4	263.90	82.52	2	269.50	85.40	4.56	2.31	6.27
137.82	38.87	5	193.63	33.05	2	139.28	34.40	7.54	4.55	5.52
348.38	62.98	3	335.67	55.68	4	349.23	63.19	13.13	0.79	13.86
94.76	87.66	1	275.00	84.00	1	93.10	87.00	8.34	1.78	9.20
300.54	68.44	1	300.00	64.00	2	299.02	68.67	4.47	1.43	4.76

Otra aplicación reciente la encontramos en el trabajo de [Jordá et. al \(2017\)](#). En dónde hace una comparación de datos de rumbo y echado de planos de discontinuidad obtenidos con brújula y fotogrametría digital en un estudio de estabilidad de taludes. Para ello utilizó el modelo de Fisher (suponiendo que todas las superficies observadas eran planos) para obtener la medida de dispersión  $\kappa$  y con ello darle validez a los datos obtenidos con fotogrametría digital.

Una alternativa para calcular los parámetros que permitan validar los datos de la actitud de planos en macizos rocosos a partir de nubes de puntos se plantea en [Mancera et. al. \(2021\)](#), en donde a partir del tensor de orientaciones es posible: primero identificar que modelo estadístico se acopla mejor al tipo de superficie y después calcular los parámetros estadísticos que permitan por un lado conocer la dispersión de un conjunto de datos y la certidumbre de que existe una orientación media que represente a este conjunto para un nivel de significancia determinado.

De hecho, casi todos los programas que ayudan a graficar datos direccionales como rumbo y echado, o dirección del echado y echado, etc., proporcionan datos de la estadística usada para el diagrama de concentración de polos por lo que directamente se pueden revisar medidas como la  $\kappa$  de Fisher, o el valor de  $\alpha_{95}$  como en el programa de [Vollmer, \(1995\)](#), *Orient*.

#### 4. Síntesis y conclusiones

Consideramos que el manejo de la estadística esférica básica debes ser un tema de dominio común en los estudiosos de Ciencias de la Tierra, sobre todo en estos tiempos en dónde resulta muy accesible la obtención de datos de las rocas mediante sensores remotos como LiDAR, Fotogrametría Digital (drones), etc., ya que se pueden obtener parámetros relativamente sencillos ajustando a modelos de distribución esférica como el Fisher y así validar la calidad de los datos cuando estos son numerosos. En este sentido se vuelve indispensable tener herramientas que permitan verificar de alguna manera lo que los sensores remotos nos pueden otorgar de datos de las rocas.

Las ventajas que tiene la utilización de estas mediciones paramétricas estadísticas es que se puede revisar numéricamente la calidad de grandes cantidades de datos de manera cuantitativa.

Se debe considerar que si bien el modelo de Fisher no es el único si es el más utilizado por su practicidad, sin embargo, existen otros tantos como el de [Bingham \(1964\)](#), Fisher-Binhham, [Kent \(1982\)](#), etc, que permiten analizar agrupaciones de datos que no tienen simetría circular, cuyas ecuaciones y teoría el lector puede revisar de forma amplia en [Borradaile \(2002\)](#) y [Mardía \(1975\)](#).

## 5. Referencias citadas

Borradaile, G. (2003). *Statistics of Earth Science Data*. Springer. <https://doi.org/doi:10.1007/978-3-662-05223-5>

Allmendinger, R. W. (2016). Stereonet 9.5, 1–45.

Davis, J. C. (2002). *Statistics and Data Analysis in Geology (Third)*. John Wiley & Sons.

Drews T, Miernik G, Anders K, et al. Drews T, Miernik G, Anders K, et al. (2018) Validation of fracture data recognition in rock masses by automated plane detection in 3D point clouds. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 19-31. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2018.06.023>

Jordá B. L, Riquelme A, Cano M, Tomás R. (2017). Comparing manual and remote sensing field discontinuity collection used in kinematic stability assessment of failed rock slopes. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2017.06.004>

Fisher, R. (1953). Dispersion on a Sphere. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 217(1130), 295–305. <https://doi.org/10.1098/rspa.1953.0064>

Mancera-Alejandrez, J., Macías-Medrano, S., Villarreal-Rubio, E., & Solano-Rojas, D. (2021). Spherical data validation of rock discontinuities orientation from Drone-derived 3D Point Clouds. *Revista Mexicana de Ciencias Geológicas*, 38(3), 152–163. <https://doi.org/10.22201/cgeo.20072902e.2021.3.1641>

Mardia, K. (1975). Statistics of Directional Data. *Journal of The Royal Statistical Society Series B-Methodological (Vol. 37)*. <https://doi.org/doi:10.2307/2984782>

Vollmer, F.W. (1995). C program for automatic contouring of spherical orientation data using a modified Kamb method: *Computers & Geosciences*, v. 21, p. 31-49.